

数 学

氏名	
----	--

受験 番号	
----------	--

1

3つの袋 A, B, C それぞれに, 1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている。A, B, C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき, 取り出した 3 枚のカードの番号を, X, Y, Z ($X \leq Y \leq Z$) とする。たとえば, A, B, C の袋から, それぞれ 24, 16, 24 を取り出したとき, $X = 16, Y = Z = 24$ である。

- (1) Z が 10 以下となるカードの取り出し方は, 30^3 通りのうち何通りあるか。
- (2) Y が 12 となるカードの取り出し方は, 30^3 通りのうち何通りあるか。
- (3) Y が 12 で, X, Y, Z が等比数列となるカードの取り出し方は, 30^3 通りのうち何通りあるか。

[解答欄]

(1) すべての袋から 10 以下のカードを引く場合の数と等しいので, $10^3 = 1000$ 答 1000 通り

(2) Y が 12 となるのは次のどれかの場合

- (a) 3枚のカードがすべて 12
- (b) 3枚のカードのうち2枚が 12
- (c) X が 1~11, Y が 12, Z が 13~30

カードの引き方 30^3 通りのうち

- (a) は 1 通り
- (b) は $3 \times 29 = 87$ 通り
- (c) は $3! \times 11 \times 18 = 1188$ 通り

よって, 求める取り出し方を数えると, $1 + 87 + 1188 = 1276$ 答 1276 通り

(3) $X, 12, Z$ は等比数列 $\iff \frac{12}{X} = \frac{Z}{12} \iff 12^2 = XZ \iff 2^4 \cdot 3^2 = XZ$

これを満たす $X \leq 12 \leq Z$ の組は, (6, 12, 24), (8, 12, 18), (9, 12, 16), (12, 12, 12)

よって, 求める取り出し方を数えると, $3! \times 3 + 1 = 19$ 答 19 通り

得点	
----	--

数 学

氏名

受験
番号

2

座標平面上で、不等式 $\frac{2^{x+1}}{3^{y-1}} + \frac{3^{y-1}}{2^x} \leq 3$ を満たす点 (x, y) 全体の集合を D とする。

- (1) 点 $(\log_2 3, \log_3 9)$ は D に属することを示せ。
- (2) 不等式 $t - 3 + \frac{2}{t} \leq 0$ を満たす正の実数 t の範囲を求めよ。
- (3) D を図示せよ。

[解答欄]

$$(1) \frac{2^{\log_2 3+1}}{3^{\log_3 9-1}} + \frac{3^{\log_3 9-1}}{2^{\log_2 3}} = \frac{3 \cdot 2}{3^{2-1}} + \frac{9 \cdot 3^{-1}}{3} = 3 \text{ より}$$

$$(2) \text{ 正の実数 } t \text{ に対して } f(t) := t - 3 + \frac{2}{t} \text{ とおくと, } f(t) = \frac{1}{t}(t^2 - 3t + 2) = \frac{1}{t}(t-1)(t-2)$$

$$t > 0 \text{ かつ } f(t) \leq 0 \iff t > 0 \text{ かつ } (t-1)(t-2) \leq 0 \iff 1 \leq t \leq 2 \quad \underline{\text{答}} \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$(3) t := \frac{2^{x+1}}{3^{y-1}} \text{ とおくと, } t > 0$$

$$\frac{2^{x+1}}{3^{y-1}} + \frac{3^{y-1}}{2^x} - 3 = t + \frac{2}{t} - 3 = f(t) \text{ なので, 小問 (2) の解より}$$

$$\frac{2^{x+1}}{3^{y-1}} + \frac{3^{y-1}}{2^x} \leq 3 \iff f(t) \leq 0$$

$$\iff 1 \leq t \leq 2$$

$$\iff 1 \leq \frac{2^{x+1}}{3^{y-1}} \leq 2$$

$$\iff 3^{y-1} \leq 2^{x+2} \leq 2 \cdot 3^{y-1}$$

ここで 3 を底とする対数をとると

$$3^{y-1} \leq 2^{x+2} \leq 2 \cdot 3^{y-1} \iff \log_3 3^{y-1} \leq \log_3 2^{x+2} \leq \log_3 (2 \cdot 3^{y-1})$$

$$\iff y - 1 \leq (x+2) \log_3 2 \leq \log_3 2 + (y-1)$$

$$\iff y \leq x \log_3 2 + 1 + \log_3 2 \text{ かつ } y \geq x \log_3 2 + 1$$

よって, $k := \log_3 2$ とおくと, D は 2 直線 $y = kx + 1$ と $y = kx + 1 + k$ で挟まれた部分

ただし, 境界線を含む [図は省略]

得
点

数 学

氏名	
----	--

受験 番号	
----------	--

3

座標空間の 6 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$, $D(2, 0, 2)$, $E(0, 2, 2)$ を頂点とする三角柱 $OAB-CDE$ がある。この三角柱の辺 OC 上の動点を P とし、 $\angle OBP = \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$) とする。3 点 P , A , B を通る平面で三角柱を切ったとき、切り口の図形の面積を $S(\theta)$ とする。

- (1) $S(45^\circ)$ を求めよ。
 (2) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 $S(\theta)$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $\theta = 45^\circ$ のとき $P = C$ で、切り口の図形は 1 辺の長さが $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ の正三角形 CAB

$$\text{よって, } S(45^\circ) = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{8} \sin 60^\circ) = 2\sqrt{3} \quad \underline{\text{答}} \quad S(45^\circ) = 2\sqrt{3}$$

(2) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、切り口の図形は $PA = PB = \frac{2}{\cos \theta}$ の二等辺三角形 PAB

$$\text{よって, } S(\theta) = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{\left(\frac{2}{\cos \theta}\right)^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{4 - 2\cos^2 \theta}}{\cos \theta}$$

ここで、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ より

$$S(\theta) = \sqrt{2} \times \sqrt{4 - \frac{4}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \quad \underline{\text{答}} \quad S(\theta) = 2\sqrt{2}$$

得 点	
--------	--

数 学

氏名	
----	--

受験 番号	
----------	--

4

a, b を実数の定数とする。座標平面において、 $y = x^3 + ax^2 + 2bx$ で表される曲線を C とする。点 $A(1, -6)$ は C 上にあり、点 A における C の接線を ℓ とするとき、 ℓ の傾きは -5 である。 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ とおき、 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とする。

- (1) a と b の値を求めよ。
- (2) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ。
- (3) 定積分 $\int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx$ を求めよ。

[解答欄]

(1) C は点 $A(1, -6)$ を通るから、 $1 + a + 2b = -6$

ℓ の傾きは -5 で、 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2b$ なので、 $f'(1) = 3 + 2a + 2b = -5$

よって、連立方程式 $a + 2b = -7, 2a + 2b = -8$ を解いて、 $a = -1, b = -3$ 答 $a = -1, b = -3$

(2) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ であり、 ℓ の方程式は $y - (-6) = -5(x - 1)$ なので $g(x) = -5x - 1$

よって、 $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 6x - (-5x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$

$f(1) - g(1) = 0$ より、 $f(x) - g(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ

$f(x) - g(x)$ を $x - 1$ で割ると $(x - 1)(x^2 - 1)$ となり、 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ なので

$f(x) - g(x) = (x - 1)^2(x + 1)$ 答 $f(x) - g(x) = (x - 1)^2(x + 1)$

(3) 小問 (2) の解より、 $-2 \leq x \leq -1$ において $f(x) - g(x) \leq 0$ 、 $-1 \leq x \leq 0$ において $f(x) - g(x) \geq 0$ なので

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx &= \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx \\ &= - \int_{-2}^{-1} (x^3 - x^2 - x + 1) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - x + 1) dx \\ &= - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 \\ &= \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2) \right) - 2 \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \left(4 + \frac{8}{3} - 2 - 2 \right) - 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{11}{12} \right) \\ &= \frac{9}{2} \qquad \qquad \qquad \text{答 } \frac{9}{2} \end{aligned}$$

得点	
----	--

数 学

氏名

受験
番号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また、選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

5

2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは、 x 軸と 2 点 $(-3, 0)$, $(1, 0)$ で交わり、頂点の y 座標は 4 である。2 次関数 $y = g(x)$ のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。 r を $0 < r < \frac{1}{2}$ を満たす定数とするとき、

$$R(t) = (1-r) \int_{-1}^t g(x) dx + r \int_t^1 f(x) dx \quad (-1 < t < 1) \text{ とおく。}$$

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) t の関数 $R(t)$ の導関数 $R'(t)$ を求めよ。

(3) $s = \frac{1}{1-2r}$ とおく。 $R(t)$ が極値をとるときの t を s を用いて表せ。

[解答欄]

(1) $f(x) = -c(x+3)(x-1)$ とおく

$$f(x) = -c\{(x+1)^2 - 4\} = -c(x+1)^2 + 4c \text{ より, } 4c = 4$$

よって、 $c = 1$ となり、 $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

$$\text{また, } g(x) = f(x-2) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 \quad \text{答 } \underline{f(x) = -x^2 - 2x + 3, g(x) = -x^2 + 2x + 3}$$

(2) $R(t) = (1-r) \int_{-1}^t g(x) dx - r \int_1^t f(x) dx$ より

$$R'(t) = (1-r)g(t) - rf(t) = -(1-2r)t^2 + 2t + 3(1-2r) \quad \text{答 } \underline{R'(t) = -(1-2r)t^2 + 2t + 3(1-2r)}$$

(3) $0 < r < \frac{1}{2}$ より、 $s > 1$

$$R'(t) = -\frac{1}{s}(t^2 - 2st - 3) = -\frac{1}{s}(t-t_1)(t-t_2)$$

$$\text{ただし, } t_1 = s - \sqrt{s^2 + 3}, t_2 = s + \sqrt{s^2 + 3}$$

$$s > 1 \text{ より, } t_2 > 1 + \sqrt{4} = 3$$

$$t_1 t_2 = -3 \text{ より, } 0 > t_1 = -\frac{3}{t_2} > -1$$

よって、 $-1 < t < t_1$ で $R'(t) < 0$ かつ $t_1 < t < 1$ で $R'(t) > 0$ となり

$$R(t) \text{ は } -1 < t < 1 \text{ において, } t = t_1 = s - \sqrt{s^2 + 3} \text{ のとき極小値をとる} \quad \text{答 } \underline{t = s - \sqrt{s^2 + 3}}$$

得
点

数 学

氏名

受験
番号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また、選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

6

複素数平面上で、点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、 $w = 2 - iz$ で表される点 w の描く図形を C とする。また、 $a = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 、 $b = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 、 $b = \cos \beta + i \sin \beta$ を満たす実数 α と β を求めよ。ただし、 $0 \leq \alpha < 2\pi$ 、 $0 \leq \beta < 2\pi$ とする。
 (2) C を複素数平面上に図示せよ。
 (3) $a^n = 2 - ib^n$ を満たす自然数 n のうち、最小のものを求めよ。

[解答欄]

$$(1) \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \text{ より } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \text{ より } \beta = \frac{\pi}{4} \quad \underline{\text{答}} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) w = -2 + iz \iff z = -i(w + 2) \text{ より}$$

$$|z| = 1 \iff |-i(w + 2)| = 1$$

$$\iff |-i| \cdot |w + 2| = 1$$

$$\iff |w + 2| = 1$$

よって、 C は点 -2 中心、半径 1 の円 [図は省略]

(3) $|b^n| = |b|^n = 1$ なので、小問 (2) の解より、 $2 - ib^n$ は点 2 中心、半径 1 の円周上にある一方、 a^n は点 0 中心、半径 1 の円周上にあり、これら 2 つの円は点 1 のみを共有するので $a^n = 2 - ib^n = 1$ を満たす自然数 n のうち、最小のものを求めればよい

$$a^n = 1 \iff \cos\left(\frac{n}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{n}{3}\pi\right) = 1 \text{ より、} n \text{ は } 6 \text{ の倍数}$$

$$2 - ib^n = 1 \iff b^n = -i \iff \cos\left(\frac{n}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{n}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \text{ より}$$

$$\frac{n}{4} = \frac{3}{2} + 2k \text{ (} k \text{ は } 0 \text{ 以上の正数), すなわち、} n = 6 + 8k \text{ (} k \text{ は } 0 \text{ 以上の正数)}$$

これが 6 の倍数となる最小の k は 0

よって、 $n = 6$ 答 $n = 6$

得
点