数　　学

氏 名	

受験番号	

$\boxed{1}$ 2 次関数 $y = ax^2 + bx + 1$ のグラフ F は 2 点 $(-2, -7)$, $(2, 1)$ を通り，直線 l は点 $(0, 1)$ で F に接する。このとき次の問に答えよ。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2) 直線 l の方程式を求めよ。

(3) F, l および直線 $x = k$ で囲まれる部分の面積が 9 になるとき，定数 k の値を求めよ。

[解答欄] (1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 4a - 2b + 1 = -7 \\ 4a + 2b + 1 = 1 \end{cases}$ を解いて，$a = -1$, $b = 2$。

(2) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ とすると，$f'(x) = -2x + 2$ より $f'(0) = 2$ となる。したがって，直線 l の傾きは 2 で点 s$(0, 1)$ を通るので直線 l の方程式は

$$y = 2x + 1$$

である。

(3) 直線 l は点 $(0, 1)$ で F に接し，$(2x + 1) - (-x^2 + 2x + 1) = x^2$ なので，F, l および，$x = k$ で囲まれる部分の面積は

$$\begin{cases} \int_0^k x^2 dx = \dfrac{k^3}{3} & (k > 0) \\ \int_k^0 x^2 dx = -\dfrac{k^3}{3} & (k < 0) \end{cases}$$

となる。これらが 9 になるのは，$k = \pm 3$ のとき。

得点	

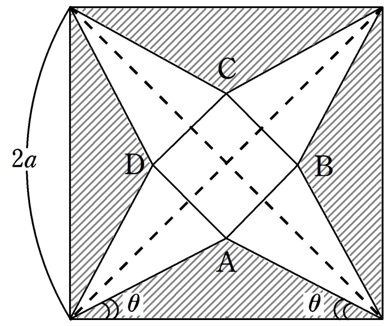
数　　学

氏名

受験番号

2

1辺の長さが $2a$ $(a>0)$ の正方形の折り紙がある。この正方形の折り紙から底角 θ $(0^\circ<\theta<45^\circ)$ の4つの二等辺三角形（図の斜線部分）を切り取り，切り取った残りの図形を組み立てて，正方形 ABCD を底面とする正四角錐をつくる。次の問に答えよ。



(1) 切り取る二等辺三角形の1つ分の面積を a と θ で表せ。

(2) 正四角錐の高さを a と θ で表せ。

注：正四角錐とは底面が正方形で側面が全て二等辺三角形であるような四角錐である。

[解答欄]

(1) 図1のように点 A から正方形の変に下ろした垂線を AE とする。三角形 AEO(O は右下のものとする）について，

$$\mathrm{EO}=a,\quad \mathrm{AE}=\mathrm{EO}\cdot\tan\angle\mathrm{AOE}=a\tan\theta$$

となる。したがって，求める二等辺三角形の面積は $a^2\tan\theta$ である。

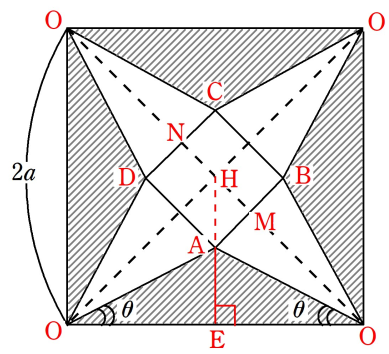


図 1: 正四角錐 O-ABCD の展開図

(2) 組み立てた正四角錐を O-ABCD とする。頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線を OH とする。このとき，$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{HA}^2}$, であり，

$$\mathrm{OA}=\frac{a}{\cos\theta},\quad \mathrm{HA}=\mathrm{HE}-\mathrm{AE}=a-a\tan\theta=a(1-\tan\theta)$$

となる。よって，正四角錐の高さ OH は

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=\sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-\{a(1-\tan\theta\}^2}\\&=\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+2\tan\theta-\tan^2\theta\right)}\\&=a\sqrt{2\tan\theta}\end{aligned}$$

である。

得点

数　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{3}$ 次の 2 条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

1. $a_1 > 0,\ a_{n+1} \neq a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$
2. 初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき，

$$S_n = a_n^2 + na_n - 4 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

このとき次の問に答えよ。

(1) 初項 a_1 を求めよ。

(2) $b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき， 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a_k = 0$ を満たす k を求めよ。

[解答欄]

(1) $a_1 > 0$ かつ $a_1 = S_1 = a_1^2 + a_1 - 4$ なので，これを解いて $a_1 = 2$ となる。

(2) $a_k = S_k - S_{k-1}$ なので

$$\begin{aligned} a_k &= (a_k^2 + ka_k - 4) - \{a_{k-1}^2 + (k-1)a_{k-1} - 4\} \\ &= a_k^2 - a_{k-1}^2 + ka_k - (k-1)a_{k-1} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$0 = a_k^2 - a_{k-1}^2 + (k-1)a_k - (k-1)a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})\{a_k + a_{k-1} + (k-1)\}$$

となる。仮定から $a_k - a_{k-1} \neq 0$ なので $a_k + a_{k-1} + (k-1) = 0$ である。すなわち，$a_k + a_{k-1} = -k + 1$ なので

$$\begin{aligned} b_{k+1} + c_k &= a_{2k+1} + a_{2k} = -(2k+1) + 1 = -2k \\ c_k + b_k &= a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1 \end{aligned}$$

となる。これより

$$b_{k+1} - b_k = -1$$

となり，$b_1 = a_1 = 2$ なので $\{b_n\}$ は初項 2, 公差 -1 の等差数列である。したがって一般項は

$$b_n = 2 - (n-1) = -n + 3$$

となる。また，$c_k + b_k = a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1$ より $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = -b_n - 2n + 1 = -(-n+3) - 2n + 1 = -n - 2$$

となる。

(3) (2) より $c_n < 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ であり，$b_n = 0$ となるのは $n = 3$ のみ。したがって $a_k = 0$ となるのは $a_k = b_3$ のときのみ，すなわち $k = 5$ のときのみである。

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4 　実数 p に対し，$X=\dfrac{p-4}{6},\ Y=\dfrac{p}{2},\ Z=\dfrac{p-1}{3}$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1) X,Y を Z で表し，$X^3+Y^3+Z^3$ を Z の多項式で表せ。

(2) p の恒等式として $\dfrac{9}{2}Z^3=Xp^2+aYp+bZ+c$ を満たす実数 a,b,c を求めよ。

(3) $X^3+Y^3+Z^3=Xp^2+Yp+Z$ となることを示せ。

(4) $16^3+50^3+33^3$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $p=3Z+1$ より，$X=\dfrac{1}{6}(3Z+1-4)=\dfrac{1}{2}(Z-1),\ Y=\dfrac{1}{2}(3Z+1)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}X^3+Y^3+Z^3 &= \left(\frac{1}{2}(Z-1)\right)^3+\left(\frac{1}{2}(3Z+1)\right)^3+Z^3\\ &= \frac{1}{8}(Z^3-3Z^2+3Z-1)+\frac{1}{8}(27Z^3+27Z^2+9Z+1)+Z^3\\ &= \frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\frac{9}{2}Z^3=\frac{9}{2}\left(\frac{p-1}{3}\right)^3=\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p-\frac{1}{6},$$

$$Xp^2+aYp+bZ+c=\frac{1}{6}p^3+\left(-\frac{2}{3}+\frac{a}{2}\right)p^2+\frac{b}{3}p-\frac{b}{3}+c$$

より，係数を比較して

$$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{3}$$

となる。

(3) (1) より，

$$X^3+Y^3+Z^3=\frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z$$

ここで，(2) より，

$$\frac{9}{2}Z^3=Xp^2+\frac{1}{3}Yp+\frac{3}{2}Z+\frac{1}{3}$$

であり，

$$3Z^2=\frac{1}{3}(p^2-2p+1)=\frac{2}{3}Yp-2Z-\frac{1}{3}$$

を得る。したがって，

$$\begin{aligned}X^3+Y^3+Z^3 &= \frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z\\ &= Xp^2+\frac{1}{3}Yp+\frac{3}{2}Z+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}Yp-2Z-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}Z\\ &= Xp^2+Yp+Z\end{aligned}$$

となる。

(4) $p=10^2=100$ とすると $X=\dfrac{96}{6}=16,\ Y=\dfrac{100}{2}=50,\ X=\dfrac{99}{3}=33$ より，

$$16^3+50^3+33^3=16\times 10000+50\times 100+33=165033$$

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

5 　点 O を原点とする座標空間において点 $A(1, -2, 2)$ と点 $B(3, -4, 5)$ をとり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。このとき次の問に答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分表示せよ。

(2) 点 F は平面 α 上にあり, その位置ベクトル $\vec{f}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直な単位ベクトルである。ただし, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とのなす角 θ は不等式 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たしている。点 F の座標を求めよ。

[解答欄]

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{9} = 3$ より $\vec{e} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ となる。

(2) 点 F は平面 α 上にあるので

$$\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる実数 k, l がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e} = 3,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{e} = \frac{1}{3}(2 + 8 + 10) = 7$ に注意すると, $\vec{f} \perp \vec{e}$ なので

$$\vec{f} \cdot \vec{e} = 3k + 7l = 0$$

となり, $k = -7\alpha,\ l = 3\alpha$ (α は実数) となる。このとき

$$\vec{f} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \alpha\left(-7\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \alpha(2, 2, 1)$$

となり, $\vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \alpha(6 - 8 + 5) = 3\alpha$ となる。$\vec{f}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ は不等式 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たしているので $\vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} > 0$, すなわち $\alpha > 0$ である。よって $\vec{f}$ は方向が $(2, 2, 1)$ の単位ベクトルであるから

$$\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}}(2, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

となる。

得点	