タイトル	平成 31 年度　推薦入試・帰国生入試 教育学部　自然・情報系　数学専攻　小論文・面接
評価の ポイント	（小論文の評価のポイント） ・与えられた条件から結論を導く過程を筋道立てて考えることができる。 ・高校数学（数学Ⅲまでの内容を含む）の正確な推論ができる。 ・解決の過程を分かりやすい形で説明できる。 （面接の評価のポイント） ・教師になりたいという強い意志を有する。 ・数学に関する基本事項を理解しており、適切な場面で活用することができる。

受験番号		氏名	

1 実数 t $\left(0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，座標平面上の点 $P(t)$ と点 $Q(t)$ を次のように定める。

- 点 $P(t)$ は中心が原点，半径が 2 の円周上にある。$P(0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ とし，$P(t)$ は $P(0)$ と $P(t)$ を結ぶ弧の長さが $2t$ となる点とする。ただし，t が増加するとき，$P(t)$ は反時計回りに動くものとする。
- 点 $Q(t)$ は直線 $y = -x$ 上にあり，原点からの距離が $1 + t$ で，第 2 象限にある。

次の問に答えよ。

(1) $P(t)$ と $Q(t)$ の座標を t を用いて表せ。

(2) 原点と $P(t)$，$Q(t)$ を頂点とする三角形の面積 $f(t)$ を求めよ。

(3) $f(t)$ を最大にする t の値がただ一つあることを示せ。

[解答欄]

(1) 弧 $P(t)P(0)$ の長さは $2t$ で，半径は 2 であるから，その中心角は t である。従って，$P(t)$ は $P(0) = \left(2\cos\dfrac{\pi}{4}, 2\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ を原点を中心に反時計回りに t だけ回転させて得られる点であり，その座標は，$\left(2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ である。また，$Q(t)$ の座標を $(x(t), -x(t))$ とおくと，原点からの距離が $1+t$ であることから，$x(t)^2 + \{-x(t)\}^2 = (1+t)^2$ が成り立つ。これを解くと $x(t) = \pm\dfrac{1+t}{\sqrt{2}}$ を得るが，条件から $Q(t)$ は第 2 象限にあるので，$x(t) = -\dfrac{1+t}{\sqrt{2}}$ でなくてはならない。よって，$Q(t)$ の座標は $\left(-\dfrac{1+t}{\sqrt{2}}, \dfrac{1+t}{\sqrt{2}}\right)$ である。

(2) 原点を O と表すと，$\angle P(0)\mathrm{O}P(t) = t$ である。また，点 $P(t)$ から直線 $\mathrm{O}P(0)$ に下ろした垂線と直線 $\mathrm{O}P(0)$ との交点を H とすると，線分 OH の長さは $2\cos t$ である。今，直線 $\mathrm{O}Q(t)$ と直線 $\mathrm{O}P(0)$ とは直交しているので，3 点 O，$P(t)$，$Q(t)$ を頂点とする三角形において，O と $Q(t)$ とを結ぶ線分を底辺とするときの高さは $2\cos t$ である。従って，$f(t) = (1+t)\cos t$ である。

(3) $f'(t) = \cos t - (1+t)\sin t$，$f''(t) = -2\sin t - (1+t)\cos t$ である。このとき，$f'(0) = 1 > 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 - \dfrac{\pi}{2} < 0$ となる。また $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ で $f''(t) < 0$ であるので，$f'(t)$ は $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において（狭義）単調減少な連続関数となる。よって，$f'(t_0) = 0$ を満たす t_0 $\left(0 < t_0 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ一つ存在する。以上より，増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(t)$ は $t = t_0$ $\left(0 < t_0 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のみで極大かつ最大となる。

得点	

受験番号		氏名	

$\boxed{2}$ $\triangle$OAB において，辺 OA と辺 OB の長さの比が 2 : 3 であるとする。辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q，辺 BO を 1 : 2 に内分する点を R とする。線分 OQ と線分 AR の交点を X，線分 AR と線分 BP の交点を Y，線分 BP と線分 OQ の交点を Z とする。$\triangle$XYZ が直角三角形になるかどうかを調べよ。

[解答欄]

$\triangle$XYZ が直角三角形であることは，以下のいずれかが成立することと同値である。

i) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$　　ii) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$　　iii) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

以下で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$ となる。

- <u>i) の場合</u>　$0=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2\right)$ より，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 6|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2\\ |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB} &= 6|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2\\ \cos\angle\mathrm{AOB} &= 6\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}-2\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = 4-3 = 1\end{aligned}$$

となる。$-1<\cos\angle\mathrm{AOB}<1$ であるはずなので，不適である。よって，$\triangle$XYZ は $\angle$YXZ を直角とする直角三角形にはならない。

- <u>ii) の場合</u>　$0=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{9}\left(11\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{a}|^2-6|\vec{b}|^2\right)$ より，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{3}{11}|\vec{a}|^2+\frac{6}{11}|\vec{b}|^2\\ \cos\angle\mathrm{AOB} &= \frac{3}{11}\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}+\frac{6}{11}\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{2}{11}+\frac{9}{11} = 1\end{aligned}$$

となり，やはり不適である。よって，$\triangle$XYZ は $\angle$XYZ を直角とする直角三角形にはならない。

- <u>iii) の場合</u>　$0=\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{9}\left(-5\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2\right)$ より，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{2}{5}|\vec{a}|^2-\frac{3}{5}|\vec{b}|^2\\ \cos\angle\mathrm{AOB} &= \frac{2}{5}\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}-\frac{3}{5}\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{4}{15}-\frac{9}{10} = -\frac{19}{30}\end{aligned}$$

となる。これは，$-1<\cos\angle\mathrm{AOB}<1$ であることに反しない。よって，$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\frac{19}{30}$ のとき $\triangle$XYZ は $\angle$XZY を直角とする直角三角形となる。

得点	