数　　学

氏 名	

受験番号	

$\boxed{1}$ xy 平面上で，自然数 n に対し単位円上の点 $\left(\cos(\sqrt{2}\pi n),\ \sin(\sqrt{2}\pi n)\right)$ を P_n とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n と m が異なるならば，点 P_n と P_m は異なることを示せ。

(2) $x \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に属する点 P_n は無限に多く存在することを示せ。

[解答欄]

(1)

$n \neq m$ かつ　$P_n = P_m$ と仮定して矛盾をみちびく。

$$\begin{aligned}&P_n = P_m\\ \Longleftrightarrow\ &\cos\sqrt{2}n\pi = \cos\sqrt{2}m\pi \text{かつ} \sin\sqrt{2}n\pi = \sin\sqrt{2}m\pi\\ \Longleftrightarrow\ &\sqrt{2}n\pi - \sqrt{2}m\pi = 2\pi k \text{ となる整数 } k \text{ が存在する。}\\ \Longrightarrow\ &\sqrt{2} = \frac{2k}{n-m} \quad \text{（整数 } n-m \neq 0 \text{ かつ 整数 } k \text{ が存在する。）}\end{aligned}$$

これは $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

(2)　(1) から $\cos\sqrt{2}n\pi \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる自然数 n が無限個存在することを示せばよい。

$\cos\sqrt{2}n\pi \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるための必要十分条件は、

$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leqq \sqrt{2}n\pi \leqq \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

となる自然数 k が存在することである。 整理すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2k - \frac{3}{4}\right) \leqq n \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2k + \frac{3}{4}\right)$$

となる自然数 k が存在することである。 このとき

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2k + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2k - \frac{3}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$$

であるから、区間 $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2k - \dfrac{3}{4}\right),\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2k + \dfrac{3}{4}\right)\right]$ には、少なくとも一つ自然数 n_k が含まれ $\cos\sqrt{2}n_k\pi \geqq -\frac{3}{4}$ を満たす。

つまり $(*)$ において

$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leqq \sqrt{2}n_k\pi \leqq \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

を満たす n_k が少なくとも 1 つある。　そして k が異なると $(*)$ の区間は交わらないことから、条件を満たす自然数 n は無限個存在する。

数　　学

氏 名	

受験番号	

2　関数 $f(x)=xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x について，不等式 $f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=0,\ y=\dfrac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$ より　$f(x)$ は　$x<1$ で単調増加、$x>1$ で単調減少である。
よって $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=\frac{1}{e}$ をとることから、$f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned}
D\text{の面積} &= 1\times\frac{1}{e}-\int_0^1 f(x)dx \\
&= \frac{1}{e}-\int_0^1 x(-e^{-x})'dx \\
&= \frac{1}{e}+[xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{e}+\frac{1}{e}+[e^{-x}]_0^1=\frac{3}{e}-1
\end{aligned}$$

(3)

求める体積 $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2dy$ である。　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2dy$ とおく。

$$I=\int_0^1 x^2f'(x)dx=\int_0^1 x^2(e^{-x}-xe^{-x})dx=\int_0^1 x^2e^{-x}dx-\int_0^1 x^3e^{-x}dx$$

ここで

$$I_n=\int_0^1 x^ne^{-x}dx \quad (n=0,1,2,\dots) \quad \text{とおくと}$$

$$I_n=\int_0^1 x^n(-e^{-x})'dx=[-x^ne^{-x}]_0^1+nI_{n-1}=-\frac{1}{e}+nI_{n-1} \quad (n=1,2,\dots),\quad I_0=\int_0^1 e^{-x}dx=1-\frac{1}{e} \quad \text{より}$$

$$I=I_2-I_3=I_2-(-\frac{1}{e}+3I_2)=\frac{1}{e}-2I_2=\frac{1}{e}-2(-\frac{1}{e}+2I_1)=\frac{3}{e}-4I_1=\frac{3}{e}-4(-\frac{2}{e}+1)=\frac{11}{e}-4$$

よって　$V=\pi(\dfrac{11}{e}-4)$

数　　学

氏 名	

受験番号	

3　$t=\cos\theta$ とする。自然数 n について，ド・モアブルの定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つことにより $\cos n\theta$ を t の n 次多項式として表すことができる。この多項式を $f_n(t)$ とし，変数 t についての $f_n(t)$ の導関数を $f_n'(t)$ とする。 このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f_6(t)$ を求めよ。

(2) 自然数 m について $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数を求めよ。

(3) $f_n(t)^2+(1-t^2)\left\{\dfrac{1}{n}f_n'(t)\right\}^2=1$ が成り立つことを示せ。

[解答欄]

(1)

$(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}{}_6C_k\cos^{6-k}\theta\cdot(i\sin\theta)^k$ において

$$\begin{aligned}\text{右辺の実部}&=\sum_{k=0}^{3}{}_6C_{2k}\cos^{6-2k}\theta\cdot(i\sin\theta)^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{3}{}_6C_{2k}t^{6-2k}(-1)^k(1-t^2)^k\\&=t^6-15t^4(1-t^2)+15t^2(1-t^2)^2-(1-t^2)^3\\&=32t^6-48t^4+18t^2-1\end{aligned}$$

(2)

$f_{2m}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}C_{2k}t^{2m-2k}(-1)^k(1-t^2)^k$ より　t^{2m}の係数 $=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}C_{2k}(-1)^k(-1)^k=\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}C_{2k}$

ここで　$A=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}C_{2k},\quad B=\sum_{k=1}^{m}{}_{2m}C_{2k-1}$ とすると

$(1+1)^{2m}=A+B,\quad(1-1)^{2m}=A-B$ より　$A=\dfrac{1}{2}\times2^{2m}=2^{2m-1}$

(3)

$\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$ を θ で微分すると　$-n\sin n\theta=-f_n'(\cos\theta)\sin\theta$　である。

よって　$\sin n\theta=\dfrac{1}{n}f_n'(\cos\theta)\sin\theta$　であることから

$$\begin{aligned}f_n(t)^2+(1-t^2)\left\{\frac{1}{n}f_n'(t)\right\}^2&=f_n(t)^2+\left\{\frac{1}{n}f_n'(t)\sin\theta\right\}^2\\&=\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta\\&=1\end{aligned}$$

数　　　学

氏名	

受験番号	

4 $a^2+b^2=c^2$ を満たす3つの自然数 a,b,c の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) a と b の差は1であり，b と c の差が1であるとき $(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ。

(2) b は2の累乗であり，b と c の差が1であるとき $(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ。

[解答欄]

(1)

$c^2=a^2+b^2>b^2$ かつ $b,c>0$ より　$c>b$ である。　よって $c=b+1$

また、$b=a+1$ である。　$\because$　　$a=b+1$ とすると $a=c$ となり $a<c$ に矛盾する。

よって $(a,b,c)=(a,a+1,a+2)$

$a^2+b^2=c^2$ より $a^2+(a+1)^2=(a+2)^2$。 故に $a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$ かつ　$a>0$ であることから、　$(a,b,c)=(3,4,5)$ を得る。

(2)

(1) と同様にして $c=b+1$ である。 このことから b と c は互いに素である。

また、a と c も互いに素である。

$\because$　a と c が公約数 $k>1$ をもつとすると　$a^2+b^2=c^2$ より b も k を約数にもつことから

b と c は互いに素であることに矛盾する。

さらに a と c は共に奇数である。

$\because$　b が偶数であることと $a^2+b^2=c^2$ であることから、もし a または c が偶数とすると、

それらは共に偶数となるが、これは a と c が互いに素であることに反する。

このとき

$c=a+2$ であることがわかる。

$\because$ $b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ かつ b が2の累乗であるので

$c+a=2^k,\quad c-a=2^\ell$ となる0以上の整数 k,ℓ が存在する。

明らかに $k>\ell$ であり、$a=2^{k-1}-2^{\ell-1},\quad c=2^{k-1}+2^{\ell-1}$ である。

もし $\ell>1$ ならば $k-1>\ell-1\geqq 1$ であることから

a と c は共に偶数となり、a と c が共に奇数であることに矛盾する。

よって　$\ell\leqq 1$ である。

一方　$\ell=0$ のとき $a-c=1$ となり　同様に矛盾する。

したがって $\ell=1$ である。

$c=b+1$ かつ $c=a+2$ であることから $(a,b,c)=(a,a+1,a+2)$ となり、

(1) と同様にして $(a,b,c)=(3,4,5)$ を得る。

数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

5 四面体 OABC において △ ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ $(0<t<1)$ とする。さらに △ ABP と線分 OG との交点を X とし，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $(0<s<1)$ とする。
このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t, s を用いて表せ。

(2) 2 点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が AB の中点であることを証明せよ。

(3) △ OMC において 2 点 C, X を結ぶ直線と線分 OM との交点を N とする。NX : XC =2 : 5 のとき t と s の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c}$

(2)

PX を延長した線分と AB との交点を M とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ となる $r>1$ が存在する。

(1) より　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\vec{c}+r(\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c})=\dfrac{rs}{3}\vec{a}+\dfrac{rs}{3}\vec{b}+\dfrac{r(s-3t)+3t}{3}\vec{c}$ である。

一方　M は AB 上にあることから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$　$(0\leqq k\leqq 1)$ と表せる。

よって　$\dfrac{rs}{3}=k$,　$\dfrac{rs}{3}=1-k$,　$r(s-3t)+3t=0$

したがって　$k=1-k$ であることから　$k=\frac{1}{2}$ となり　M は AB の中点である。

(3)

N は OM を $u:1-u$ に内分しているとする。

このとき　$s\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{5}{7}u\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$ より　$s\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{5}{7}u\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$

よって $\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s}{3}\vec{c}=\dfrac{5u}{14}\vec{a}+\dfrac{5u}{14}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$　であることから、 $s=\dfrac{2}{7}\times 3=\dfrac{6}{7}$,　$u=\dfrac{4}{5}$ を得る。

(2) で求めた $\dfrac{rs}{3}=\dfrac{1}{2}$,　$r(s-3t)+3t=0$ に $s=\dfrac{6}{7}$ を代入し $t=\dfrac{2}{3}$ を得る。